

Öğrenci Konu Notu 03 — Sayıların Atomları: Asal Sayılar

Bu derste neler öğreneceğim?

- Bir sayının pozitif çarpanlarını kullanarak asal mı, bileşik mi olduğunu açıklayacağım.
- 0, 1 ve 2 için neden özel bir karar verdiğimizi anlayacağım.
- Bir sayının bütün çarpan çiftlerini sistemli arayıp kararımın neden tamam olduğunu göstereceğim.

1. Önceki dersten bir köprü

Ders 02'de 12 pul için 1×12 , 2×6 ve 3×4 dikdörtgenlerini kurduk. Bunların her biri 12'nin bir **çarpan çifti**dir. Döndürülmüş düzenleri aynı sayıyoruz; çarpan listesini yazarken ise çiftin iki ucunu da alıyoruz.

Peki **13 pul** ile ne olur? 1×13 düzeni kurulabilir. İki veya üç eşit sıraya ayırmaya çalışınca pul artar. Başka bir çarpan çifti bulamayız. 12 ile 13 arasındaki farkı, çarpan listeleri de gösterir:

Sayı	Pozitif çarpanları
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
13	1, 13

🤔 Dur ve Düşün

13'ün yalnızca 1×13 düzenini kurabilmemiz ile iki pozitif çarpanı olması arasında nasıl bir bağ var?

2. Asal ve bileşik ne demek?

1'den büyük bir doğal sayı, pozitif çarpanları yalnızca **1 ve kendisi** ise **asal sayıdır**. Bu iki çarpan birbirinden farklıdır. Örneğin 13 asaldır: çarpanları 1 ve 13'tür.

1'den büyük bir doğal sayının 1 ve kendisi dışında bir pozitif çarpanı da varsa sayı **bileşiktir**. Örneğin 12 bileşiktir; 2×6 düzeni, 1 ve 12 dışında çarpanlar verir.

9 da bileşiktir. 1×9 'a ek olarak 3×3 düzeni vardır. 3'ü listede iki kez yazmayız; pozitif çarpanlar 1, 3 ve 9'dur. Bir çarpan çiftinin iki ucunun eşit olması, sayıyı asal yapmaz.

Temel fikir

Kararı sayının görünüşüne göre değil, **bütün pozitif çarpanlarına** göre ver. Asal için tam iki farklı pozitif çarpan gerekir.

3. 0, 1 ve 2 neden özel?

1 ne asal ne bileşiktir. Çünkü asal veya bileşik tanımı 1'den büyük sayılar içindir. Ayrıca 1'in yalnızca bir farklı pozitif çarpanı vardır: 1.

0 da ne asal ne bileşiktir. 0, 1'den büyük değildir. Bu derste asal veya bileşik diye sınıflandırdığımız sayılar 1'den büyük doğal sayılardır.

2 asaldır. Pozitif çarpanları yalnızca 1 ve 2'dir. 2, **tek çift asal sayıdır.** Çünkü 2'den büyük her çift sayı 2'ye kalansız bölünür; böylece 1 ve kendisine ek olarak 2 çarpanı bulunur.

Dikkat!

“Bütün tek sayılar asaldır” yanlıştır. 9 tektir ama $3 \times 3 = 9$ olduğundan bileşiktir. “1 asaldır” da yanlıştır: 1'in iki farklı pozitif çarpanı yoktur.

4. Bir sayıyı sistemli nasıl inceleriz?

29'u düşünelim. 1×29 her pozitif sayı için vardır; yeni bir düzen arıyoruz. Küçük kenarı sırayla 2, 3, 4 ve 5 olarak deneriz. 29'u bu sayılara kalansız bölemeyiz. İki kenar da en az 6 olsaydı en az $6 \times 6 = 36$ pul gerekirdi. 29 pulumuz olduğundan yeni bir dikdörtgen düzeni kalmaz. Demek ki 29'un pozitif çarpanları yalnızca 1 ve 29'dur; **29 asaldır.**

Bu yöntem “birkaç sayı denedim, herhalde asal” demekten güçlüdür. Hangi küçük kenarları denediğimizi ve neden daha büyük yeni bir kenar olamayacağını açıklarız. Bu derste özel bir karekök kuralı öğrenmemiz gerekmiyor; dikdörtgenin iki kenarını düşünüyoruz.

Çözümlü örnek A — 21'i sınıflandır

1×21 yanında 3×7 düzeni de vardır. 21'in pozitif çarpanları 1, 3, 7 ve 21'dir. **21 bileşiktir.** Bileşik olduğunu göstermek için $3 \times 7 = 21$ eşitliği yeterlidir.

Çözümlü örnek B — 17'yi sınıflandır

$2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$ ve $4 \times 4 = 16$; 17'de küçük kenar olarak 2, 3 ve 4'ü deneriz. Hiçbiri 17'yi kalansız bölmez. İki kenar da en az 5 olsaydı en az 25 pul gerekirdi. Bu nedenle yalnızca 1×17 kalır ve **17 asaldır.**

5. Eratosthenes kalburu: 1–30 arasında asalları bul

Sayıları sırayla yazıp bileşikleri eleme yöntemine **Eratosthenes kalburu** denir. Bir sayı “elekten geçiyormuş” gibi düşün; fakat kararı her zaman çarpanla gerekçelendir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

1. **1'i ayır:** 1 ne asal ne bileşiktir; kalburun asal listesine girmez.
2. **2'yi daireye al:** 2'nin kendisini bırak, 4, 6, 8, ..., 30'u çiz. Bunların hepsinin 2 dışında en az bir çarpanı vardır.
3. **3'ü daireye al:** 3'ün kendisini bırak, 6, 9, 12, ..., 30'u çiz. Bazıları önceden çizilmiş olabilir; 9 yeni bir örnektir.
4. **5'i daireye al:** 5'in kendisini bırak, 10, 15, 20, 25, 30'u çiz. Burada yeni çizilen 25'tir: $5 \times 5 = 25$.
5. **7'yi kontrol et:** $7 \times 7 = 49$, yani 30'u aşar. 7'nin 30'a kadarki diğer katları zaten 2, 3 veya 5 aşamasında elenmiştir.

Geriye **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29** kalır. Bunlar 1–30 arasındaki asal sayılardır. 30'a kadar bileşik bir sayının iki çarpanı da 5'ten büyük olamaz; çünkü $6 \times 6 = 36$, 30'u aşar. Bu yüzden 2, 3 ve 5 ile eleme bu aralıktaki yeterlidir. Kalbur yalnızca **seçtiğimiz aralıktaki** asalları verir; “bütün asal sayıları bulduk” demiyoruz.

6. İleri Seviye — İsteğe bağlı

Birinin “37'yi 2, 3 ve 4 ile denedim; o hâlde asaldır” dediğini düşün. Kararı doğru olabilir, ama gerekçesi henüz tamamlanmamıştır. 5 ve 6 da denenmelidir. 37 bu sayılara da kalansız bölünmez. İki kenar da en az 7 olsaydı en az $7 \times 7 = 49$ pul gerekirdi. Böylece yeni çarpan çifti kalmaz ve 37'nin asal olduğu tamamlanmış bir gerekçeyle gösterilir.

Sayıların atomları benzetmesi yararlıdır: bileşik bir sayı, 1 ve kendisi dışında çarpan çiftleriyle kurulabilir. Fakat gerçek atomlardan söz etmiyoruz; bu bir matematik benzetmesidir. Asal çarpanlara ayırmayı sonraki derslerde inceleyeceğiz.

7. Kısa özet

- Asal sayı: 1'den büyük, tam iki farklı pozitif çarpanı olan doğal sayı.
- Bileşik sayı: 1'den büyük, 1 ve kendisi dışında da pozitif çarpanı olan doğal sayı.
- 0 ve 1 bu iki grupta değildir; 2 tek çift asaldır.
- Bileşikliği göstermek için yeni bir çarpan çifti yeterlidir. Asallığı göstermek için başka çift kalmadığını da açıklamalıyız.

8. Ders Sonu Soruları

Önce kendin çöz. İlk altı soruda temel fikirleri kullan; son iki soru isteğe bağlı derinleştirmedir. Yalnız “asal” veya “bileşik” yazma: gerekçeni de göster.

1. (OKN-01) 7 ve 10'un pozitif çarpanlarını ayrı ayrı yaz. Hangisi asal, hangisi bileşik? Neden?

Yanıtım:

.....

2. (OKN-02) 1, 2 ve 9'u asal / bileşik / ikisi de değil biçiminde sınıflandır. Her karar için kısa gerekçe yaz.

Yanıtım:

.....

3. (OKN-03) 15 pulun döndürme dışında farklı dikdörtgen düzenlerini yaz. Bu düzenlerden 15'in bütün pozitif çarpanlarını bul.

Düzenlerim ve kararım:

.....

4. (OKN-04) 27 ve 29'dan hangisi asaldır? Bileşik olan için yeni bir çarpan çifti göster; asal olan için başka çift kalmadığını açıkla.

Gerekçem:

.....

5. (OKN-05) “Tek olan her sayı asaldır” iddiasını bir karşı örnekle değerlendir. Karşı örneğin hangi çarpanları iddiayı çürütüyor?

Karşı örneğim:

.....

6. (OKN-06) 1'den 20'ye kadar olan doğal sayıları düşün. Bu aralıktaki asal sayıları yaz. 15 ve 16'nın neden listede olmadığını ayrı ayrı açıkla.

Listem ve gerekçem:

.....

İleri Seviye — İsteğe bağlı

7. (OKN-07) 35 ile 37'yi karşılaştır. 35 için bileşikliği bir eşitlikle göster. 37 için olası küçük kenarları sistemli deneyerek asallığı açıkla.

Açıklamam:

.....

8. (OKN-08) İki **farklı** asal sayının toplamı tek olabilir mi? Olabiliyorsa örnek ver. Hangi asal sayının toplamda bulunması gerektiğini tek–çift bilgisini kullanarak açıkla.

Örneğim ve gerekçem:

.....